1 System rzymski

6. Wykonaj działania. Wynik zapisz w systemie rzymskim. Czy potrafisz wykonać obliczenia bez korzystania z systemu dziesiątkowego?

a) MMCLVII + CMLXXII b) CDLII – LXXXVIII c) MMMCDL – DLXXI

***7.** a) Od największej liczby, którą można zapisać w systemie rzymskim za pomocą znaków: I, V, X, L, C, D, M, odjęto liczbę trzycyfrową, która ma w zapisie rzymskim najwięcej znaków. Jaką liczbę otrzymano?

b) Od liczby czterocyfrowej, która ma w zapisie rzymskim najwięcej znaków, odjęto największą liczbę, którą można zapisać za pomocą znaków: I, X, L, C, M, ale użytych tyko raz. Jaką liczbę otrzymano?

8. Z podanych znaków rzymskich ułóż dwie liczby, których suma zapisana w systemie rzymskim wynosi C.

a) C, X, X
b) L, X, X, X, X, X
c) L, L, X, V, V, I, I
d) L, X, X, X, X, X, I, I
e) C, X, X, I, I
f) L, X, X, X, X, V, I, I, I, I, I

9. W kalendarzu żydowskim obliczanie lat zaczyna się od 7 października 3761 roku (MMMDCCLXI) p.n.e. Zapisz w systemach dziesiątkowym i rzymskim, w którym roku według tej rachuby:

a) odbyły się pierwsze udokumentowane igrzyska olimpijskie w Grecji (776 r. p.n.e.),

b) powstało miasto Rzym (753 r. p.n.e.),

c) urodził się Aleksander Macedoński (356 r. p.n.e.).

VLADISLAUS D.G.
REX POLONIAE AB
MCCCLXXXVI LITUANIAE
PRINCEPS SUPREMUS AB
MCCCLXXVII.

NATUS MCCCLI.

MORTUS MCDXXXIV.

10. W tekście w ramce podano datę urodzenia i śmierci Władysława Jagiełły, a także napisano, kiedy został wielkim księciem litewskim, a kiedy (nieco później) królem Polski.

a) Znajdź te daty i zapisz je cyframi arabskimi.

b) Ile lat żył Jagiełło według podanych dat?

c) Data urodzenia nie jest całkowicie pewna. Niektórzy historycy uważają, że Jagiełło urodził się dziesięć lat później. Który to był rok? Zapisz odpowiedź cyframi rzymskimi.

2 Własności liczb naturalnych

Pomyśl

13. a) Suma trzech liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą. Czy ich iloczyn jest liczbą parzystą czy nieparzystą?

b) Suma trzech liczb naturalnych jest liczbą parzystą. Czy ich iloczyn jest liczbą parzystą czy nieparzystą?

14. a) Wiadomo, że cyfrą dziesiątek liczby trzycyfrowej jest 3 i liczba ta jest podzielna przez 4. Z jakich cyfr może się składać ta liczba?

b) Wiadomo, że liczba trzycyfrowa o różnych cyfrach jest większa od 900 i podzielna przez 9. Z jakich cyfr może się składać ta liczba? Ile jest takich liczb?

c) Wiadomo, że liczba czterocyfrowa o różnych cyfrach jest podzielna przez 3. Jaka jest najmniejsza liczba spełniająca ten warunek?

15. Przez jakie liczby jednocyfrowe są podzielne liczby równe poniższym iloczynom?

a) $11 \cdot 55$ b) $22 \cdot 33$ c) $14 \cdot 17 \cdot 19$ d) $22 \cdot 66 \cdot 77$ e) $14 \cdot 21 \cdot 30$

16. Ile różnych dzielników ma liczba, której rozkład na czynniki pierwsze jest podany poniżej?

a) $11 \cdot 17$ b) $73 \cdot 103$ c) $7 \cdot 13 \cdot 19$ d) $71 \cdot 73 \cdot 79$ *e) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

***17.** Ile różnych dzielników ma liczba, której rozkład na czynniki pierwsze jest podany poniżej?

a) 7^2 b) $5^2 \cdot 11$ c) $2^3 \cdot 13$ d) $13^2 \cdot 17^2$

18. Znajdź resztę z dzielenia liczby 730 049 przez:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9 f) 10

19. a) Przez jaką liczbę należy podzielić 18, żeby otrzymać resztę 3?

b) Przez jaką liczbę należy podzielić 14, żeby otrzymać resztę 2?

c) Przez jaką liczbę należy podzielić 39, żeby otrzymać resztę 4?

***20.** a) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 3, 4 i 6.

b) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która podzielona przez każdą z liczb: 3, 4 i 6 daje taką samą resztę równą 2.

c) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która podzielona przez każdą z liczb: 2, 4, 5, 8 i 10 daje taką samą resztę równą 1.

d) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która podzielona przez 2 daje resztę 1, podzielona przez 3 daje resztę 2, a podzielona przez 4 daje resztę 3.

***21.** a) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez 5 i 13.

b) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 5 i 13 daje resztę 4.

c) Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 7 i 5 daje resztę 3.

***22.** Gdy podzielimy pewną liczbę przez 12, otrzymamy iloraz a i resztę 11. Gdy podzielimy tę samą liczbę przez 13, otrzymamy iloraz 11 i resztę a. Jaka to liczba?

23. a) Rozłóż liczbę 60 na czynniki pierwsze.

b) Wymień wszystkie dzielniki liczby 60, które są podzielne przez 6.

c) Znajdź wszystkie pary liczb, których największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 6, a najmniejszą wspólną wielokrotnością jest 60.

24. Sprawdź, czy suma $3 \cdot 10 + 5 \cdot 10^7 + 10^9 + 9 \cdot 10^{20}$ jest liczbą podzielną przez:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9 f) 10

25. Wyjaśnij, dlaczego:

a) suma $10^{99} + 9$ nie jest liczbą podzielną przez 9,

b) różnica $10^{100} - 1$ jest liczbą podzielną przez 9,

*c) suma $10^{15} + 5$ jest liczbą podzielną przez 15.

26. a) Wszystkie cyfry pewnej liczby są jedynkami. Znajdź tę liczbę, jeżeli jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca ten warunek i podzielna przez 9.

*b) Wszystkie cyfry pewnej liczby są piątkami. Znajdź tę liczbę, jeżeli jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca ten warunek i podzielna przez 15.

*c) Wszystkie cyfry pewnej liczby są czwórkami. Znajdź tę liczbę, jeżeli jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca ten warunek i podzielna przez 36.

*d) Wszystkie cyfry pewnej liczby są trójkami. Znajdź tę liczbę, jeżeli jest to najmniejsza możliwa liczba spełniająca ten warunek i podzielna przez 27.

27. a) Czy liczbę 25 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych?

*b) Czy liczbę 125 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych?

***28.** Znajdź najmniejszą liczbę, która podzielona przez 22 daje wynik podzielny przez 2, a podzielona przez 33 daje wynik podzielny przez 3.

3 Porównywanie liczb

18. Znajdź wszystkie liczby całkowite większe od mniejszej z podanych liczb i mniejsze od większej z tych liczb.

a) $\sqrt{12}; \sqrt{18}$ c) $\sqrt{48}; \sqrt{96}$ e) $-\sqrt{26}; -\sqrt{3}$ g) $-\sqrt{10}; \sqrt{10}$

b) $\sqrt{27}; \sqrt{72}$ d) $\sqrt{220}; \sqrt{360}$ f) $-\sqrt{43}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$ h) $-\sqrt{420}; -\sqrt{250}$

19. Zapisz podane liczby w postaci dziesiętnej.

$\frac{4}{9}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{8}{11}$ $\frac{4}{13}$ $\frac{1}{44}$ $\frac{1}{66}$ $\frac{1}{99}$

20. Skorzystaj z równości $\frac{1}{22} = 0{,}0(45)$ i oblicz.

a) $3 \cdot 0{,}0(45)$ c) $11 \cdot 0{,}0(45)$ e) $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0(45)$

b) $7 \cdot 0{,}0(45)$ d) $22 \cdot 0{,}0(45)$ f) $0{,}22 \cdot 0{,}0(45)$

21. Wiadomo, że $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$ oraz że $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$. Ile wynosi suma liczb $0{,}(3)$ i $0{,}(6)$?

***22.** Znajdź liczbę niewymierną leżącą pomiędzy podanymi liczbami.

a) 1 oraz 1,3 c) $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{5}$

b) 4,6 oraz 5 d) $-\sqrt{18}$ oraz $-\sqrt{17}$

23. Podkreślone liczby zapisz bez używania potęg.

a) Do operacji mikrochirurgicznych używa się igieł o grubości $5 \cdot 10^{-5}$ m i nici o grubości $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ m.

b) Najmniejszy brylant poddany oszlifowaniu miał wagę $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ g, średnicę $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ m i wysokość $1{,}1 \cdot 10^{-4}$ m.

c) W 1901 roku odkryto na preriach USA kolonię piesków preriowych liczącą $4 \cdot 10^{6}$ osobników i zamieszkującą powierzchnię $6{,}1 \cdot 10^{10}$ m^2.

d) Zaporę Rogun na rzece Wachsz w Tadżykistanie zbudowano z $7{,}55 \cdot 10^{7}$ m^3 betonu i odgrodzono nią $1{,}16 \cdot 10^{10}$ m^3 wody.

e) Średnica atomu węgla jest równa $7{,}7 \cdot 10^{-13}$ m, a w 1 gramie czystego węgla mieści się $5 \cdot 10^{22}$ atomów.

24. Podkreślone liczby zapisz w notacji wykładniczej.

a) Najlżejszym gazem jest wodór, którego 1 cm^3 waży 0,00009 g, a najcięższym radon, którego 1 cm^3 waży 0,01 g.

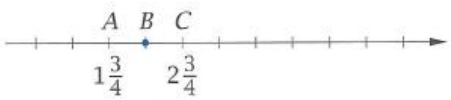
b) Najlepsze mikroskopy optyczne są w stanie powiększyć obraz 2,5 tys. razy. Mikroskopem elektronowym można uzyskać powiększenie do 250 tys. razy.

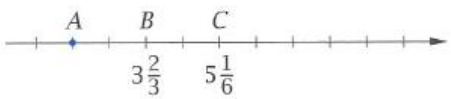
c) Budowa Kanału Panamskiego kosztowała 387 mln dolarów. Podczas budowy wykorzystano 27,5 mln ton dynamitu i przerzucono 163,8 mln m^3 ziemi.

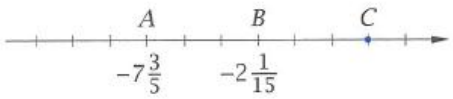
d) Samica dorsza składa do 5 mln jajeczek, z których każde ma około 0,0015 m średnicy.

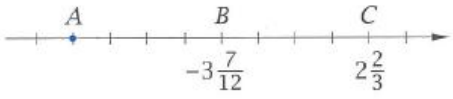
4 Działania na liczbach

31. Dane są współrzędne dwóch punktów na osi liczbowej. Oblicz współrzędną trzeciego punktu.

a) 

b) 

c) 

d) 

32. Oblicz, a następnie przepisz wyrażenie i wstaw w nim nawiasy w taki sposób, aby otrzymać mniejszy wynik.

a) $3\frac{1}{2} + 4\frac{5}{6} - 8 : 1\frac{1}{4}$ b) $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{6} - 1 : 1\frac{1}{4}$ c) $4\frac{1}{5} : 2\frac{1}{10} - 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$

33. W tabeli przedstawiono skład różnych produktów żywnościowych. Liczby oznaczają, jaką część porcji produktu stanowią podstawowe składniki.

Produkt	Woda	Białko	Tłuszcze	Węglowodany
orzechy laskowe	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{28}$
fasola	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{8}$
ser żółty	$\frac{7}{16}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

a) Określ, którego składnika jest najwięcej w każdym z produktów.

b) W którym z podanych produktów jest najwięcej białka?

c) Jaką część każdego z produktów stanowią składniki niewymienione w tabeli?

d) Czego jest więcej w orzechach — białka czy węglowodanów? Ile razy więcej?

34. Zgodnie z zaleceniem należy rozpuścić 1 łyżkę naparu ziołowego w 1,5 szklanki wody i wypić jednorazowo $\frac{1}{4}$ szklanki tak otrzymanego leku. Jaką część łyżki naparu zawiera jednorazowa porcja leku?

35. Masa jaj kurzych waha się od 4,5 dag do 7,5 dag. Białko stanowi około $\frac{2}{3}$ masy jajka, a skorupka około $\frac{1}{10}$ masy jajka. Oblicz masę żółtka w najmniejszych i największych jajkach.

36. Gdy artysta rysuje człowieka, stara się zachować odpowiednie proporcje ludzkiego ciała. Wysokość całej postaci jest $7\frac{1}{2}$ razy większa od wysokości jej głowy. Odległość od linii bioder do stóp jest równa czterem wysokościom głowy. Jaką część wysokości postaci stanowi odległość od linii bioder do stóp?

37. Oszacuj wyniki bez wykonywania dokładnych rachunków.

a) Odległość między orbitami Saturna i Ziemi jest równa 1277 mln km. Czy sonda kosmiczna pokonująca w ciągu dnia 1,5 mln km przebędzie tę odległość w ciągu roku?

b) Staropolska mila była równa 7146 m i dzieliła się na 8 stajań. W XIX wieku wprowadzono nowopolską milę równą 8534,3 m i dzielącą się na 8 wiorst. Czy kilometr jest jednostką większą czy mniejszą od stajania i od wiorsty?

c) Powierzchnia lądów wynosi 148,94 mln km^2. Czy sześć największych państw zajmuje w sumie ponad połowę powierzchni lądów?

Państwo	Rosja	Kanada	USA	Chiny	Brazylia	Australia
Powierzchnia (w mln km^2)	17,08	9,98	9,63	9,60	8,51	7,69

38. a) Wiadomo, że 1 cl (centylitr) to 10 ml. Ile centylitrów jest w jednym litrze, a ile — w jednym hektolitrze?

b) Wiadomo, że 10 decybeli (dB) to 1 bel (B). Ilu belom odpowiada 130 dB?

c) Wiadomo, że 1 kWh (kilowatogodzina) to 1000 watogodzin (Wh). Ile kilowatogodzin jest w 1 000 000 Wh?

d) Wiadomo, że 1 MJ (megadżul) to milion dżuli (J). Jaką część megadżula stanowi 20 000 J?

39. W tabeli podano masy różnych substancji o objętości 1 cm^3.

Bakelit	Ołów	Złoto	Platyna
1340 mg	11,35 g	1,928 dag	0,02145 kg

a) Ile kilogramów waży 100 dm^3 każdej z tych substancji?

b) Jaką objętość w dm^3 ma 1 t każdej z tych substancji?

40. a) W buteleczce mieści się 30 cm^3 leku. Lek przyjmuje się w dawkach po 0,5 ml. Na ile dawek wystarczy leku w butelce?

b) W cysternie mieści się 13 m^3 paliwa. Ile zbiorników na paliwo o pojemności 50 litrów można napełnić paliwem z tej cysterny?

c) Z jednej pomarańczy wyciśnięto 10 cl soku. Ile takich pomarańczy należy wycisnąć, aby wypełnić kartonik o wymiarach 4 cm × 8 cm × 25 cm?

41. Półtorakilometrowy odcinek szosy o szerokości 7 m pokryto pięciocentymetrową warstwą asfaltu.

a) Ile hektarów zajmuje ten odcinek szosy?

b) Jaką objętość ma asfalt użyty do pokrycia tego odcinka?

42. Podczas deszczu na każdy metr kwadratowy spadło 15 litrów wody.

a) O ile milimetrów zwiększyła się w wyniku tego deszczu głębokość wody w otwartym basenie?

b) Ile metrów sześciennych wody spadło na park, który ma powierzchnię $0{,}2\,\text{km}^2$?

43. a) O której godzinie prawdziwe jest stwierdzenie: „do północy zostało jeszcze 5 razy tyle czasu, ile upłynęło od północy"?

b) O ile mniej sekund upływa między godziną 15:34 a północą niż między północą a godziną 15:34?

c) Minutowa wskazówka zegara wykonała 45 pełnych obrotów wokół tarczy. Ile pełnych obrotów wokół tarczy wykonała w tym czasie wskazówka godzinowa, a ile — wskazówka sekundnika?

44. Maksymalna dopuszczalna ilość szkodliwych pyłów PM10 (typowy składnik smogu) w powietrzu to $5 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$.

a) W ilu metrach sześciennych powietrza zmieści się 1 kg PM10, jeżeli jego stężenie odpowiada maksymalnej dopuszczalnej ilości?

b) Człowiek wykonuje około 12 wdechów po 0,5 l powietrza w ciągu minuty. Ile gramów PM10 wchłonie on w ciągu tygodnia, jeżeli norma zawartości PM10 w powietrzu, którym oddycha, zostanie przekroczona 10-krotnie?

5 Działania na potęgach i pierwiastkach

15. Znajdź liczby a, b i c.

a) $2^{12} = 4^a = 8^b = 64^c$

b) $10^{20} = 100^a = 10\,000^b = 100\,000^c$

16. Znajdź liczbę a.

a) $4 \cdot 2 \cdot 16 = 2^a$

b) $9 \cdot 27 \cdot 81 = 3^a$

c) $125 \cdot 25 \cdot 125 = 5^a$

d) $\frac{8 \cdot 64}{2^7} = 2^a$

e) $\frac{10^7 \cdot 100}{100\,000} = 10^a$

f) $\frac{3^{14} \cdot 27}{81 \cdot 3^5} = 3^a$

17. a) Powierzchnia Ziemi jest równa $5{,}1 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2$, a Księżyca — $3{,}8 \cdot 10^{13}\ \text{m}^2$. O ile powierzchnia Ziemi jest większa od powierzchni Księżyca?

b) Krew człowieka zawiera $2{,}5 \cdot 10^{13}$ krwinek czerwonych, z których każda ma powierzchnię $1{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{m}^2$. Oblicz powierzchnię wszystkich krwinek czerwonych we krwi człowieka.

18. a) Pierwiastek kwadratowy z iloczynu liczb dodatnich a i b pomnożono przez pierwiastek z ilorazu liczby a przez liczbę b. Jaki wynik otrzymano?

b) Pierwiastek kwadratowy z iloczynu liczb dodatnich a i b podzielono przez pierwiastek z ilorazu liczby a przez liczbę b. Jaki wynik otrzymano?

19. Niech a i b będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Wyraź x za pomocą a i b.

a) $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot x} = ab$

b) $\sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot b \cdot x} = ab$

c) $\sqrt[3]{a^6 : a^3 \cdot (b : x)} = a$